

Fraunhofer Beugung (Fernfeld)

- bisher: Fresnel Beugung in paraxialer Näherung
- nun: zusätzlich nehmen wir an, dass z sehr groß ist $z \gg$ Objektgröße

Beugungsintegral (paraxial)

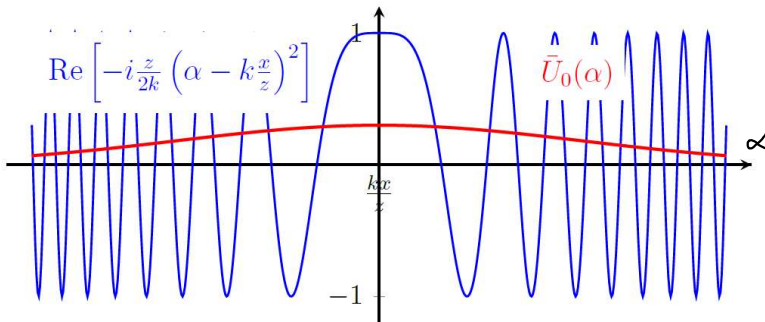
$$u(x,y,z) \approx \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy \bar{U}_0(\alpha, \beta) \exp(i(k - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k})z) e^{i(\alpha x + \beta y)} \quad \text{Fresnel Beugung (Nahfeld)}$$

Quadratische Ergänzung: $-\left(\alpha^2 \frac{z}{2k} - \alpha x + \frac{k}{2z} x^2\right) + \frac{k}{2z} x^2 = -\frac{z}{2k} \left(\alpha - k \frac{x}{z}\right)^2 + \frac{k}{2z} x^2$

$$\frac{z}{2k} \left(\alpha^2 - 2\alpha \frac{k}{z} x + \frac{k^2 x^2}{z^2}\right)$$

$$= \exp\left[ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy \bar{U}_0(\alpha, \beta) e^{-i\frac{z}{2k} \left[\left(\alpha - k \frac{x}{z}\right)^2 + \left(\beta - k \frac{y}{z}\right)^2\right]}$$

↑ komplexer Gauß



Für große z trägt nur noch das Zentrum zum Integral bei

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dx dy \bar{U}_0(\alpha, \beta) e^{-i \dots} \approx \bar{U}_0\left(k \frac{x}{z}, k \frac{y}{z}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-i \dots}$$

$$\Rightarrow u(x,y,z) \approx \frac{2\pi k}{iz} \exp\left[ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)\right] \bar{U}_0\left(k \frac{x}{z}, k \frac{y}{z}\right) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{z}{k} \left(\alpha - k \frac{x}{z}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\pi k}{iz}}$$

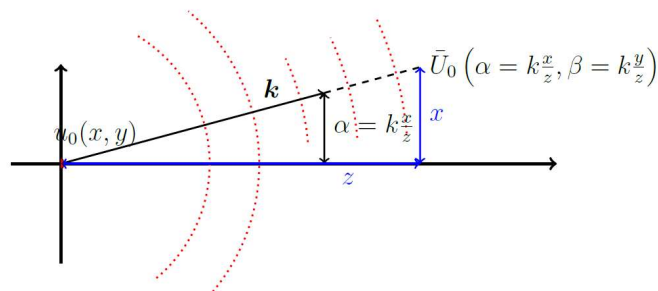
$$\approx \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = r$$

$$u(x,y,z) \approx \frac{(2\pi)^2}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \bar{U}_0\left(k \frac{x}{z}, k \frac{y}{z}\right)$$

Kugelwelle !

⇒ Amplitude der Welle ist gegeben durch $\bar{U}_0\left(k \frac{x}{z}, k \frac{y}{z}\right)$

⇒ In der Fraunhofer Beugung ergibt sich die Intensitätsverteilung auf einem Schirm einfach durch die FT des gebeugten Objekts



Faustregel für Anwendung der Näherung $z \gg \frac{\pi W_0^2}{\lambda} = z_R$

⇒ weiteres Kriterium: Fresnelzahl: $N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$ a - Objektradius

für $W_0 = 2a \Rightarrow 1 \gg \frac{\pi W_0^2}{\lambda z} = 4\pi N_F \Rightarrow \boxed{N_F \ll \frac{1}{4\pi}}$

Bemerkung: Für die Anwendung der Fresnelbeugung gilt $N_F \ll \frac{1}{\theta_{\max} \pi}$ θ_{\max} - maximaler Öffnungswinkel des Beugungsmusters

Woher kommen die Näherungen?

$z \sqrt{k^2 - \alpha^2} = zk \sqrt{1 - \theta^2} \approx zk \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8}\right)$

Fresnel-Näherung: $z \frac{\pi}{\lambda} \frac{\theta^4}{8} \ll 1$

Fraunhofer Näherung: $z \frac{\pi}{\lambda} \frac{\theta^2}{2} \ll 1$

Beispiel: Der Gaußstrahl in Fraunhofer Näherung

$u(x, y, z) = \frac{(z\pi)^2}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \bar{u}_0\left(k \frac{x}{z}, k \frac{y}{z}\right)$ mit $\bar{u}_0(\alpha, \beta) = A_0 \frac{W_0^2}{4\pi} e^{-\frac{W_0^2}{4}(\alpha^2 + \beta^2)}$

$= A_0 \frac{\pi W_0^2}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \exp\left[-\frac{W_0^2 k^2}{4z^2}(x^2 + y^2)\right]$ NR: $\frac{W_0^2 k^2}{4} = \frac{W_0^2 \pi^2}{\lambda} = \frac{z_R^2}{W_0^2}$

$= -A_0 i z_R \frac{e^{ikr}}{r} \exp\left[-\frac{1}{W_0^2} \frac{z_R^2}{z^2}(x^2 + y^2)\right]$

Vergleich mit der paraxialen Lösung aus Kapitel 3.3

$u(x, y, z) = \frac{e^{ikz} e^{i\varphi} A_0}{\sqrt{1 + (z/z_0)^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W_0^2(1 + (z/z_0)^2)}\right] \exp\left[i \frac{z}{z_0} \frac{x^2 + y^2}{W_0^2(1 + (z/z_0)^2)}\right]$

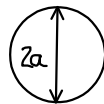
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\approx \frac{z^2}{z_R^2}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow 0 \text{ für } z \gg z_R}$

Näherung $\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \approx \frac{z}{z_R} \approx \frac{r}{z_R}$
 $\varphi = -\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \approx -\frac{\pi}{2} \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

für $z \gg z_R \exp[\dots] = 1$

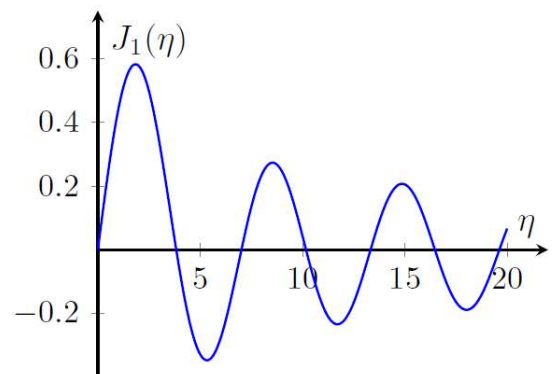
Beugungsbilder:

a.) Lochblende: kreisförmige Verteilung



$u_0(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > a^2 \end{cases}$

$|U(x, y, z)| \sim \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy \right|^2 \quad \alpha = k \frac{x}{z}, \beta = k \frac{y}{z}$
 $= \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i \frac{k}{z}(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} r dr d\varphi$



$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{i s r \cos(\varphi - \vartheta)}}_{= 2\pi J_0(s r) \text{ Besselfunktion 0. Ordnung}} d\varphi r dr$$

$$= 2\pi \int_0^a r J_0(s r) dr \quad \begin{matrix} s r = r' \\ dr = dr' / s \end{matrix}$$

$$= \frac{2\pi}{s^2} \int_0^{a s} r' J_0(r') dr'$$

$$= \frac{2\pi a}{s} J_1(a s) \propto \frac{J_1(\eta)}{\eta} \text{ mit } \eta = a s = \frac{a k}{z} \sqrt{x^2 + y^2}$$

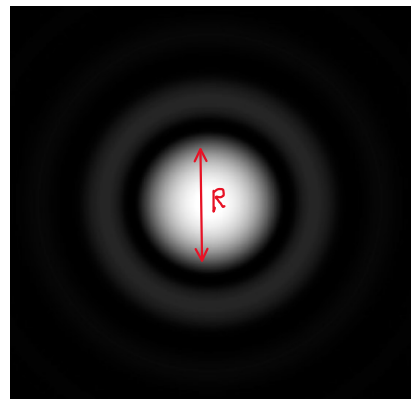
$$\Rightarrow |u(x, y, z)|^2 \propto \left| \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right|^2$$

\Rightarrow rotationssymmetrisches **Airy-Scheibchen**

Radius des Scheibchens: Nutze erste Nullstelle der Besselfunktion $\eta_0 \approx 1,22\pi$

$$\Rightarrow 1,22\pi = \frac{\alpha 2\pi}{\lambda z} R \quad R\text{-Radius}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1,22\lambda}{2\alpha} z$$



Bemerkung: Die FT einer radialen Funktion $f(r)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{FT}[f(x, y)](\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{FT}[f(r)](\alpha, \beta) = \int_0^\infty r f(r) J_0(Rr) dr \quad \text{mit } \begin{matrix} \alpha = R \cos \vartheta \\ \beta = R \sin \vartheta \end{matrix}}$$

Hankel Transformation

b.) Periodische Struktur: $u_0(x) = u_0(x+d)$

$$\Rightarrow \bar{u}_0(\alpha) = \sum_m \alpha_m \delta\left(\alpha - m \frac{2\pi}{d}\right) \quad \nearrow \text{Ausführliche Rechnung siehe Tutorium 9}$$

$$= \sum_m \alpha_m \delta\left(k \frac{x}{f} - m \frac{2\pi}{d}\right)$$

Fraunhofer Näherung

Babinet'sches Prinzip: Die Beugungsmuster zweier inverser Blendenstrukturen sind außerhalb der Nullten Beugungsordnung identisch (Feynfeld).

Beispiele: • Loch- und Kreisblende
• Nadel und Spalt

$$|\tilde{u}(x, y, z)| \sim \left| \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - u_0(x', y')] e^{-i(\alpha x' + \beta y')} dx' dy' \right| \quad \text{mit } \alpha = \frac{kx}{r}, \beta = \frac{ky}{r}$$
$$\sim \left| \underbrace{\delta\left(\frac{kx}{r}\right) \delta\left(\frac{ky}{r}\right)}_{\text{Nullte Beugungsordnung}} - \bar{u}_0\left(\frac{kx}{r}, \frac{ky}{r}\right) \right|^2$$

⇒ für $x \neq 0, y \neq 0$ gilt $|\tilde{u}(x, y, z)| = |u(x, y, z)|$